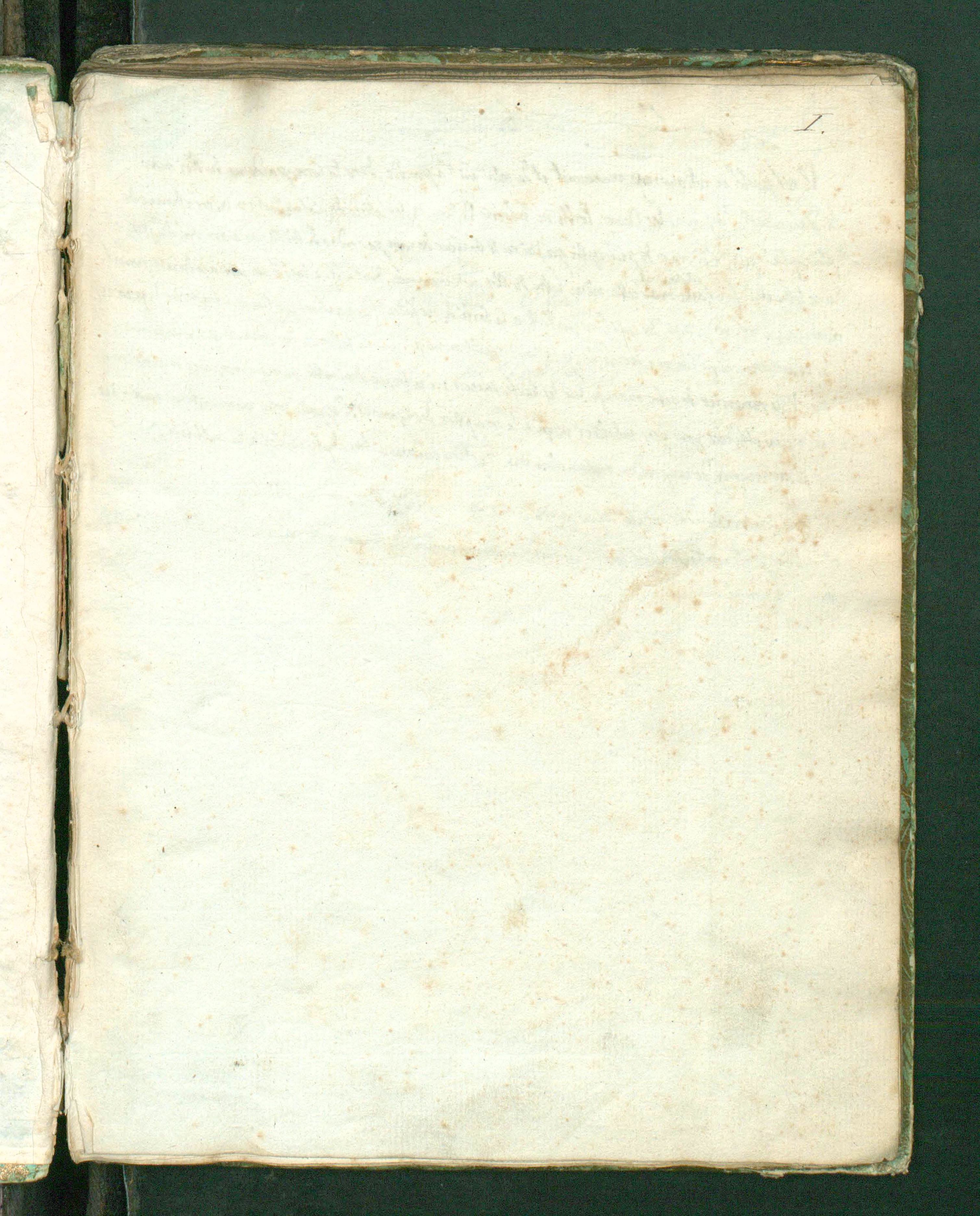






Il est parlé de cet ouvrage manuscrit, et de celui qui l'a précédé, dans la Correspondance du Roi avec M. Dalembert. Voy. dans les Oeuvr. Posth. de Frédéric II, tom. 14, les lettres de Dalembert: p. 11, "ces élémens de "philosophie"; p. 14, "l'ouvrage de philosophie que j'ai eu le bonheur de faire par ordre de V. M., m'a procuré de sa part "une lettre etc." (c'est, ~~sans doute~~ comme on voit, cette même lettre du Roi, non imprimée, dont Dal. a inséré un passage dans le present ouvrage, pag. 78–80); p. 15, "les questions que V. M. a la bonté de me faire" (ces questions que l'auteur traite ici); p. 20. 21, "les éclaircissemens qu'Elle m'a demandés"; p. 15, "mon nouvel ouvrage". — La lettre du Roi, tome 11, p. 5: "Je comence "par vous remercier de votre ouvrage sur les hautes sciences, que je trouve admirable, parceque vous avez daigné descendre "des régions éthérées pour vous rabaisser jusqu'à la conception des ignorans. J'appelle votre manuscrit mon guide-âne, "et je me rengorge de comprendre quelque chose aux mystères que vous autres adeptes cachez à la multitude."

Ces Eclaircissemens ont été depuis inséré par l'auteur dans le tome 5me de ses "Mélanges de Littér., d'Histoire, et de Philosophie"; non tout-à-fait tels qu'ils furent présentés au Roi de Prusse, mais refondus: voy. l'Avertissement du volume nommé.

Suite des Eclaircissemens sur les Elemens de Philosophie

Sire,

Votre Majesté, par sa lettre du 16 août dernier, m'a fait l'honneur de me proposer deux questions.

La premiere, *comment on employe l'analyse algebrique en Géometrie?*

La seconde, *En quels cas on peut se servir de la metaphysique dans cette science, de même que les*

cas où l'application en est vitieuse?

Des quatre Sections que renferme ce petit volume, les deux dernieres sont destinées à repondre à ces deux questions; mais pour y satisfaire avec toute l'exactitude et toute la clarté qui a dépendu de moi, j'ai eté obligé d'en faire préceder la solution par quelques réfléxions génerales sur les Elemens de Géometrie et d'algebre. Il m'a paru necessaire, afin de mieux remplir les vues de Votre Majesté, de répondre, pour ainsi dire, d'abord, à des questions qu'Elle ne m'a pas faites; Heureux, si Elle juge ensuite que j'aye suffisamment

resolu celles sur les quelles Elle desire plus particulierement d'être éclaircie. Heureux du moins, si Votre Majesté daigne recevoir avec sa bonté ordinaire ce nouvel Ouvrage, comme une marque de mon dévouement à ses ordres, & du très profond respect avec le quel je serai toute ma vie

Sire

de Votre Majesté

Le très humble &

très obeissant serviteur

à Paris ce 8 Nov. 1764

D'alembert

Table

§. XVI. Sur les Elemens de Geometrie.

Nous avons déja donné dans le §. IV de ces éclaircissemens une esquisse legere du plan suivant lequel ces élemens doivent être traités. Mais ce que nous en avons dit alors n'étoit que par forme d'exemple, et pour faire connoitre par une espece de tableau, emprunté de la Science la plus exacte et la plus simple, les differens ordres de principes que les sciences renferment ou peuvent renfermer. Nous allons ici envisager les élemens de Geometrie pris en eux mêmes, et proposer quel-

-ques réfléxions sur la meilleure maniere de les traiter, et sur les inconveniens où l'on peut tomber à ce Sujet.

On se plaint et avec raison de la disette réelle où nous sommes de bons élemens de cette science, au milieu de la malheureuse et sterile abondance d'ouvrages dont nous sommes inondés en cette partie. Tous les defauts qu'on reproche à ces ouvrages se reduisent presque uniquement à un seul qui en est la source commune; à ce que les idées n'y sont pas placées dans l'ordre naturel qui leur

convient. Par là il arrive, ou qu'on
suppose ce qui auroit besoin d'être
démontré, ou qu'on prouve d'une ma-
-nière peu rigoureuse ce qui devroit et
pourroit être démontré en rigueur, ou
qu'on demontre par des voyes la-
-borieuses et quelque fois insuffisan-
-tes, ce qui pourroit être demontré
avec beaucoup plus de simplicité.

Pour placer les idées dans
l'ordre naturel, il faut surtout se
rendre attentif aux définitions, non
seulement en y mettant toute la préci-
sion possible (ce qui n'a pas besoin d'être
recommandé) mais en ne renfermant
pas dans la définition des vérités

qu'elle ne doit pas contenir, et qui doivent en être la conséquence. Un exemple fera sentir parfaitement la necessité du precepte que nous donnons ici, et les inconveniens auxquels on s'expose en s'en écartant.

Si je veux définir les parallèles, voici, ce me semble, comment je dois m'y prendre pour ne mettre dans cette définition que ce qu'elle doit absolument renfermer; je supposerai d'abord une ligne droite tirée a volonté; sur cette ligne j'eleverai, en deux points differens, deux perpendiculaires, que je supposerai égales; et par l'extremité de ces

perpendiculaires j'imaginerai une
ligne droite, que j'appellerai parallele
à la ligne supposée. Il faudra deduire
de cette definition toutes les proprietés
des paralleles; car elles y sont neces-
-sairement contenues; il faudra demon-
-trer entr'autres que la ligne parallele
à la ligne supposée, et qui en est également
distante dans deux de ses points, a
tous ses autres points également dis-
-tans de l'autre ligne; c'est à dire que
les perpendiculaires elevées en quelques
points que ce soit sur la ligne sup-
-posée, et aboutissantes à la ligne paral-
-lele, sont toutes égales aux deux per-
-pendiculaires par l'extremité desquelles

cette parallele a été tirée. Supposer cette verité sans la demontrer, c'est supposer ce que la definition ne renferme et ne doit renfermer qu'implicitement; car cette definition ne suppose et ne doit supposer que l'egalité des deux perpendiculaires, dont les extremitez suffisent pour determiner la position de la parallele; d'où il faut conclure et prouver l'egalité de ces perpendiculaires avec toutes les autres.

J'ose avancer, et je ne crains point d'être contredit par ceux qui y reflechiront, que la proposition que nous presentons à demontrer ici, et en general la theorie des paralleles,

est un des points le plus difficiles dans les élemens de Geometrie; et j'ajoute que cette theorie seroit bien avancée par cette demonstration.

On parviendroit peut être plus facilement à la trouver, si on avoit une bonne définition de la ligne droite; par malheur cette définition nous manque. Il ne paroit pas possible d'en donner une autre que celle dont presque tous les mathematiciens font usage; mais cette définition, comme nous l'avons dit ailleurs,* exprime plutot une proprieté de la ligne droite, que sa notion primitive. Ce n'est pas

*Elem. de Philosophie p. 164.

que je veuille, avec quelques geometres, chercher cette notion dans l'idée que la vision nous donne de la ligne droite, en nous apprenant que les points de cette ligne se couvrent les uns les autres, lorsque l'œil se trouve placé dans son prolongement. Cette notion de la ligne droite seroit très peu Geometrique 1.° parce qu'il y a des lignes droites pour un aveugle, et que l'illustre Sanderson entr'autres en avoit une idée très distincte sans en avoir jamais vu; 2.° parce qu'il seroit impossible de savoir que la lumiere se repand en ligne droite, si pour connoitre

la rectitude d'une ligne, nous n'avions d'autre moyen que d'examiner si les points de cette ligne se cachent les uns les autres quand l'œil est placé dans son prolongement. Si la lumiere se propageoit en suivant une ligne circulaire d'une courbure determinée, et que l'œil fut placé sur la circonfé-rence d'un tel cercle; tous les points de ce cercle se cacheroient les uns les autres, et cependant la ligne sur laquelle ils seroient placés ne seroit pas droite.

On ne definiroit pas mieux la ligne droite, en disant avec d'autres auteurs que c'est une ligne dont tous les points sont dans la même direction:

Car qu'est ce que direction? Et comment en peut on avoir l'idée si on n'a déja celle de ligne droite?

On est donc comme forcé d'en revenir à la définition ordinaire; que la ligne droite est celle qui est la plus courte d'un point à un autre; mais il est aisé de sentir que cette définition n'est pas telle qu'on pourroit le desirer. En premier lieu. D'ou sait-on que d'un point à un autre, il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court? Pourquoi ne pourroit il pas y en avoir plusieurs, tous differens, tous égaux, et tous les

plus courts? On n'est persuadé de la verité contraire et on ne la suppose dans la définition de la ligne droite, que par ce qu'on a déja dans l'esprit ou plutôt dans les sens, si je puis parler de la sorte, une notion de la ligne droite qui renferme implicitement cette verité. C'est cette notion qu'il faudroit exprimer; mais les termes et peut être les idées nous manquent pour cela. Hoc opus, hic labor est.

En second lieu; supposons qu'en effet la ligne droite soit le plus court chemin d'un point à un autre, que ce plus court chemin soit unique, et qu'il n'y en ait pas deux égaux; je

vois clairement comment on peut conclure delà, que si on veut mener une ligne droite d'un point à un autre, tous les points par lesquels doit passer cette ligne, sont neces-sairement donnés, et que la ligne qui joint deux quelconques de ces points est aussi la plus courte qu'on puisse mener ou imaginer de l'un à l'autre. Mais je ne vois plus avec la même évidence, *en partant de la définition supposée*, qu'une ligne droite tirée par deux points ne puisse être prolongée que d'une seule maniere, ou ce qui revient au même, que deux lignes droites,

tirées d'un même point à deux autres points, ne puissent pas avoir une partie commune; je ne dis pas que cela ne soit évident; je dis (et je me flatte qu'on en conviendra après y avoir fait réflexion) que cela ne suit pas évidemment de la définition supposée, mais d'une notion primitive de la ligne droite que nous avons dans l'esprit sans pouvoir en quelque façon la rendre par des expressions; idée dont la définition supposée n'est que la suite.

La définition et les proprietés de la ligne droite ainsi que des lignes paralleles, sont donc l'écueil, et pour

ainsi dire, le scandale des élemens de Geometrie. Je ne crains point que les mathematiciens philosophes taxent de puerilité les réflexions que je viens de faire ; puisqu'elles ont pour objet non seulement de porter la plus grande precision dans une science dont la precision est l'ame, mais de montrer par des exemples frappans la necessité et la rareté des bonnes définitions.

On peut faire sentir l'un et l'autre par un nouvel exemple tiré des mêmes élemens de Geo-metrie, par la définition de l'angle. Pour s'en former une idée nette, il

faut necessairement, et y faire entrer l'idée de l'espace que l'angle renferme, et en même temps borner cet espace, puis-qu'autrement la grandeur de l'angle dependroit de celle des lignes qui le comprenent; ce qui est contraire à la vraie notion qu'on doit s'en former. Il faut donc supposer un arc de cercle decrit du sommet de l'angle comme centre, et d'un rayon pris à volonté, mais qui soit toujours le même pour quelque angle que ce soit; et on appel-lera angle l'espace terminé par cet arc de cercle; par ce moyen on viendra about de demontrer avec précision et clarté toutes les propositions qui con-

-cernent les angles. Remarquons en passant que la mesure des angles par les arcs de cercle decrits de leur sommet, est fondée sur l'uniformité du cercle, qui fait que toutes les parties sont semblables et toujours disposées de la meme maniere par rapport aux rayons qui y aboutis-sent; cette uniformité, qui se prouve par le principe de la superposition, * est un point sur lequel on n'appuye peut être pas assés dans les élemens ordinaires, et qui est pourtant le principe fondamental de la théorie des angles.

* Voyéz sur ce principe le §. IV des éclaircissemens précédens.

Au reste la définition de l'angle

qu'on vient de donner, suppose que les deux côtés de cet angle soient des lignes droites, et non une ligne droite et une ligne courbe; comme seroient un arc de cercle et sa tangente. Ce dernier angle, si on peut lui donner ce nom, a été le sujet d'une grande dispute entre les Geometres, pour savoir s'il étoit comparable ou non à l'angle rectiligne, c'est à dire, à l'angle formé par des lignes droites; il est aisé de voir que ce n'est absolument qu'une question de nom. Tout depend de l'idée qu'on attache en cette occasion au mot angle. Si on en-tend par ce mot une portion finie de l'espace compris entre la courbe et sa tangente, il

n'est pas douteux que cet espace ne soit comparable à une portion finie de celui qui est renfermé par deux lignes droites qui se coupent. Si on veut y attacher l'idée ordinaire de l'angle formé par deux lignes droites, on trouvera, pour peu qu'on y réflé-chisse, que cette idée prise absolument et sans modification, ne peut convenir à l'angle de contingence, parce que dans l'angle de contingence une des lignes qui le forme est courbe. Il faudra donc donner pour cet angle une définition particuliere; et cette définition, qui est arbitraire, étant une fois bien fixée, il ne pourra

plus y avoir de difficulté sur la question dont il s'agit. Une bonne preuve que cette question est purement de nom, c'est que les Géometres sont d'ailleurs entierement d'accord sur toutes les propriétés qu'ils démontrent de l'angle de contingence; qu'entre un cercle et sa tangente, on ne peut faire passer de lignes droites; qu'on y peut faire passer une infinité de lignes circulaires, et ainsi du reste. Il en est a peuprès de la querelle sur l'angle de contingence, comme de la fameuse question des forces vives, où on ne dispute que faute de s'entendre *, et

* V. Elemens de Philosophie art. de la Mechanique page 203.

ou tout le monde est d'accord sur le fond en differant dans les termes; et c'est a peu près ce qu'on doit penser de toutes les discutions metaphysiques qui partagent quelquefois les mechaniciens et les Geometres.

Si on doit sattacher dans les élemens de geometrie, a ne mettre dans les definitions que ce qui y est necessaire, pour donner plus de precision et de rigueur aux propositions qu'on en déduit, il est un autre écueil qu'on doit eviter avec soin, c'est celui de ne pas developper suffisamment l'idée qu'on doit attacher à certaines expressions.

La Geometrie, meme élementaire, et
toutes les parties des mathematiques
font souvent usage d'expressions de
cette espece, qui dans le sens meta-
-phystique qu'elle presentent, parois-
-sent d'abord peu exactes ; mais
qui ne doivent etre regardées que
comme des manieres abregées de
s'exprimer, que les mathématiciens
ont inventées pour enoncer une verité
dont le developpement et l'enoncé
exact auroit demandé beaucoup plus
de mots. Il faut donc avant que
de faire usage de ces expressions, fixer
d'une maniere nette et precise, la notion
qu'elles renferment.

* On dit, par exemple, qu'un parallelogramme est le produit dela base par sa hauteur. Que signifie cette proposition? Qu'est-ce que le produit dela base par la hauteur, c'est à dire la multiplication d'une ligne par une autre? Est ce qu'on multiplie des lignes par des lignes? Non certainement; car dans toute multiplication une des deux quantités aumoins doit être un

---

* Ceci se trouve déja dans la section sur les principes metaphysiques du calcul infinitesimal, mais on a cru devoir le reporter ici, ou est sa veritable place.

nombre abstrait; multiplier c'est prendre un certain nombre de fois une certaine chose ou un certain nombre de choses; on peut multiplier une ligne par un nombre, par exemple par 3, ce qui signifie qu'on prendra cette ligne trois fois, mais on ne multiplie point une ligne par une ligne; cette operation ne presente aucune idée nette. Quelques Mathématiciens, il est vrai, ont dit que la multiplication d'une ligne par une ligne consistoit a prendre une de ces lignes autant de fois qu'il y a de points dans l'autre; ce qui produit une surface. Mais cette notion est sujette à beaucoup de difficultés. Elle

suppose que la surface est composée de lignes, et la ligne de points; elle suppose que pour prendre une ligne autant de fois qu'il y a de points dans une autre, il faut que cette autre ligne soit elevée perpendiculairement sur la 1.ere; car si le côté d'un parallelogramme n'est pas perpendiculaire à la base, alors le parallelogramme n'est plus le produit du côté par la base; cependant suivant les notions que se forment de la surface les mathématiciens que nous combattons, on ne peut disconvenir que dans la surface du parallelogramme

la base ne se trouve repetée autant de
fois que le côté a de points; à moins
qu'on ne veuille admettre dans une ligne
des points plus grands les uns que
les autres, ce qui jette dans de nouvelles
absurdités. Que signifie donc cette
proposition, qu'un parallelogramme
rectangle est le produit de sa base
par sa hauteur? Elle signifie que si
on suppose la base divisée en un certain
nombre de petites parties égales, par
exemple de pouces ou de lignes, et
la hauteur en un certain nombre des
mêmes parties égales c'est à dire de
pouces ou de lignes, le rapport du
parallelogramme rectangle au quarré

de chacune de ses parties, sera egal au rapport que le produit des deux nombres de division de la base et de la hauteur aura avec l'unité.

Par exemple, supposons la base divisée en 100 lignes ou pouces, et la hauteur en 25; le produit de ces deux nombres, qui est 2500, — c'est à dire le rapport de ce nombre à l'unité, exprimera le rapport du parallelogramme rectangle au quarré fait d'une ligne ou d'un pouce; ce parallelogramme contenant en effet 2500 petits quarrés d'un pouce ou d'une ligne. ainsi, dire qu'un pa-rallelogramme est le produit de

sa base par sa hauteur, c'est une maniere abregée d'exprimer la proposi-tion que nous venons d'enoncer, et dont l'enonciation rigoureuse et developpée auroit demandé trop d'etendue et de circonlocution; dans les sciences on peut se servir utilement de ces sortes d'expressions abregées, quoique peu exactes en elles mêmes; je dis plus; on a besoin pour ne point trop fatiguer l'esprit, de s'en servir souvent, pourvu qu'on ait soin de bien fixer le sens précis qui doit y être attaché. C'est par malheur ce qu'on ne fait pas toujours, et ce qui peut quelque fois être reproché aux Geometres mêmes.

Il est aisé de conclure de cet exemple et de plusieurs autres qu'on pourroit y joindre, que le mot de mesure en mathématiques, renferme l'idée d'un rapport implicitement exprimé. Or il est certains rapports qui offrent plus de difficultés que les autres, soit pour en presenter la notion d'une maniere bien nette, soit pour les demontrer d'une maniere rigoureuse; ce sont les rapports des quantités incommensurables. On dit, par exemple, que la diagonale du quarré est à son côté comme la racine quarrée de 2 est à 1; pour avoir une

idée bien nette de la verité que cette proposition exprime, il faut d'abord remarquer qu'il n'y a point de racine quarrée du nombre 2; ni par consequent de rapport proprement dit entre cette racine et l'unité; ni par consequent de rapport proprement dit entre la diagonale et le côté d'un quarré; ni par consequent enfin d'égalité entre ces rapports, puisqu'il n'y a point proprement d'égalité entre des rapports qui n'existent pas. Mais il faut remarquer en meme temps, que si on ne peut trouver un nombre, qui multiplié par lui même produise 2, on peut trouver des nombres qui multipliés

par eux mêmes produisent un nombre aussi approchant de 2 qu'on voudra; soit en dessus, soit en dessous. Or si on a deux nombres quelconques dont l'un donne un quarré plus grand que 2, mais avec si peu de difference qu'on voudra, et l'autre un quarré plus petit que 2, avec si peu de difference qu'on voudra, une ligne qui auroit avec le côté du quarré un rapport exprimé par le 1.er de ces nombres seroit toujours plus grande que la diagonale, et une ligne qui auroit avec le même côté du quarré un rapport

exprimé par le second nombre, seroit plus petite que la même diagonale. Voilà le developpement de cette proposition, que la diagonale est au côté du quarré comme la racine quarrée de 2 est à 1. Il en est de meme de toutes les autres propositions qui regardent des rapports incommensurables, et cela suffit pour faire voir quel sens précis on y doit attacher.

Cette facilité qu'on a de representer les rapports incommensurables, non par des nombres exacts, mais par des nombres qui en approchent aussi près qu'on voudra sans jamais representer rigoureusement ces rapports, est cause

que les mathématiciens ont étendu la denomination de *nombre* aux rapports incommensurables, quoi-qu'elle ne leur appartienne qu'im-proprement, puisque les mots *nombre* et *nombrer* supposent une désignation exacte et précise, dont ces sortes de rapports ne sont pas susceptibles; aussi n'y a-t-il pro-prement que deux sortes de nombres, les nombres *entiers* comme 2, 3, 4, &c. Et les nombres *rompus* ou *fractions*, comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. &c. Ou $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{7}$. &c. Les premiers representent les rapports de deux grandeurs dont l'une contient l'autre

une certaine quantité de fois exactement, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois; les seconds expriment le rapport de deux grandeurs dont l'une contient exactement, une certaine quantité de fois, la moitié, le tiers, le quart, le 5.eme de l'autre et ainsi de suite; les rapports representés par des nombres rompus peuvent même se reduire très aisement à des rapports representés par des nombres entiers; car quand je dis, par exemple, qu'une ligne est les $\frac{3}{4}$ d'une autre ligne, c'est comme si je disois que la premiere ligne est à la seconde dans le rapport du nombre entier 3 au nombre entier 4.

Delà il est aisé de voir, que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres proprement dits, il ne s'en faut rien, pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, la difference d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, pouvant être aussi petite qu'on voudra.

Deux autres raisons ont fait ranger les rapports incommensurables parmi les nombres; la premiere c'est que ces rapports ont plusieurs proprietés qui leur sont communes

avec les nombres, et peuvent être soumis à plusieurs égards à un calcul semblable à celui des nombres, comme nous le verrons plus en détail dans les deux §§. suivants; la seconde, c'est que si on veut donner au mot nombre une idée plus étendue que celle qu'on lui donne ordinairement, et qui ne renferme proprement que les nombres entiers et les fractions, alors les rapports in-commensurables peuvent y être compris, puisque ces rapports, quoiqu'ils ne puissent pas être désignés rigoureusement par l'arithmétique, peuvent être, si non exprimés, au moins representés par la Geometrie; par exemple, le rapport de la

racine quarrée de 2 à l'unité, qui ne peut être exprimé arithmétiquement, peut être representé geometriquement par le rapport de la diagonale du quarré à son côté; il en est de même d'une infinité d'autres rapports incommensurables, que la geometrie represente aisem.t par les rapports de certaines lignes; par exemple, la racine quarrée de 3 peut être representée par le rapport du double de la hauteur d'un triangle équilateral au côté du même triangle; celle de 5 par le rapport de la diagonale d'un parallelogramme rectangle

au petit côté de ce même parallelograme, en supposant la base double de la hauteur; et ainsi de mille autres exemples de cette espece qu'on pourroit multiplier à l'infini. Cette remarque sur la possibilité de representer les rapports incommensurables par la geometrie nous sera utile dans la suite pour faire connoitre quelle est l'utilité de l'application de l'analyse à cette science.

§. XVII. Des Elemens d'algebre.

L'imperfection que nous avons remarquée dans plusieurs des notions que donnent pour l'ordinaire les élemens de Geometrie, ne se rencontre gueres moins dans celles que presentent la plus part des élemens d'algebre; quelques exemples en seront la preuve.

La 1.re et en un sens la plus essentielle des définitions que ces élemens doivent offrir, est celle de l'algebre même. Il semble que les auteurs d'élemens se soient mis peu en peine de donner une idée nette de la nature de cette science et de son objet; les uns

disent que c'est l'art de faire sur les lettres de l'alphabeth les mêmes operations qu'on fait sur les chiffres; définition ridicule à tous égards. Les autres se bornent à dire que c'est la science du calcul des grandeurs en general, définition plus exacte, mais qui a besoin d'être plus developpée qu'elle ne l'est ordinairement par les auteurs Elementaires.

Il faut d'abord partir de ce principe, que le calcul des grandeurs ne peut consister qu'a determiner le rapport des grandeurs entr'elles; or il y a comme nous l'avons vu a

la fin du §. précedent, deux sortes de rapports; les uns qui peuvent être exprimés exactement par des nombres, soit entiers, soit rompus; les autres, qu'on appelle incommensurables, et qui ne peuvent être exprimés par des nombres que d'une maniere approchée, mais qui peuvent être representés, ou qu'on peut imaginer être representés d'une autre maniere, par exemple par le rapport d'une ligne à une autre. Nous allons faire voir d'abord qu'elle est l'utilité des caracteres algebriques pour representer les nombres proprement dits, et les rapports qu'ils expriment; nous verrons en suite l'utilité de ces

mêmes caracteres pour representer les rapports incommensurables.

Pour sentir quel est l'avantage d'exprimer les nombres par des caracteres algebriques, il faut remarquer que l'arithmétique ordinaire a deux sortes de principes; les uns sont dependants des signes ou chiffres par lesquels on exprime les nombres, et ce sont eux qu'on appelle proprement regles de l'arithmétique; regles qui sont attachées à la nature de ces signes, et qui seroient differentes, si au lieu de 10 caracteres dont nous nous servons pour exprimer tous les

nombres possibles, nous en avions un plus grand ou un plus petit nombre, ou si aulieu dedisposer ces caractères comme nous le faisons pour exprimer les nombres, nous les disposions autrement, et que par la nous interchangeassions et leur valeur intrinsèque et leur valeur relative. Mais outre les principes sur lesquels sont fondées ces regles, l'arithmétique en a d'autres plus generaux, independans des signes par lesquels on peut exprimer les nombres, et uniquement attachés à la nature des nombres même; tels sont ceux-ci;

Si on retranche un plus petit nombre

d'un plus grand, et qu'on ajoute au plus petit nombre ce qui resul-tera de cette operation, on aura le plus grand nombre;

Le produit de deux nombres, divisé par l'un des deux produisans, donne l'autre produisant;

Le produit du quotient d'une division par le diviseur doit rendre le dividende &c. et ainsi du reste.

Ces sortes de principes n'etant proprement que des proprietés generales des rapports ou des nombres, qui ont lieu pour quelques nombres que ce soit, et de quelque maniere que ces nombres soient designés; il s'ensuit d'abord que ces

propositions generales peuvent être mises sous les yeux de la maniere la plus claire et la plus simple, en supposant les nombres representés par des caracteres generaux; on a choisi pour exprimer ces caracteres les lettres de l'alphabeth, comme etant plus connues, et d'un usage plus familier et plus universel. Premiere utilité de l'algebre, de servir à representer et à demontrer d'une maniere simple et facile les verités qui ont rapport aux proprietés generales des nombres.

Ce n'est pas tout. Comme il y a des proprietés generales des nombres,

independantes de la maniere dont ils sont exprimés, il doit y avoir aussi pour le calcul des nombres, des principes generaux, par le moyen desquels on pourra exprimer de la maniere la plus simple et la plus abregée qu'il sera possible le resultat de la combinaison de ces nombres, et des operations qui seront la suite de cette combinaison. Les regles pour trouver ce resultat sont les regles de l'algebre. Ainsi l'addition algebrique n'est autre chose que le moyen d'exprimer de la maniere la plus courte et la plus simple

le resultat de l'addition de plusieurs nombres, en ne donnant à ces nombres aucune valeur particuliere; il en est de même de la soustraction, et des autres regles.

L'utilité de ces regles ne se borne pas a representer de la maniere la plus simple le resultat des operations qu'on peut faire sur les nombres en general. Supposons qu'un ou plusieurs nombres, ou en general une ou plusieurs quantités (car on a déja dit que toute quantité pouvoit être representée par un nombre) soient exprimés par des caracteres algebriques; supposons de plus que ces nombres soient connus

et donnés, et qu'on propose de trouver un ou plusieurs autres nombres qui dependent des nombres donnés par de certaines conditions ; il est visible 1.° que par la generalité des caracteres algebriques, on peut exprimer ces conditions supposées entre les nombres cherchés et les nombres donnés. 2.° que par la generalités des operations algebriques, on pourra pratiquer egalement ces operations sur les nombres cher-chés comme sur les nombres donnés. Or en vertu de ces operations l'algebre enseigne à degager les nombres cherchés d'avec les nombres donnés,

en sorte qu'on ait la valeur des
premiers exprimée de la maniere la
plus simple par un resultat qui ne
contiendra plus que les seconds; et
les operations que ce resultat indique
etant pratiquées sur tels nombres
qu'on voudra, pris à volonté, donne-
-ront la valeur des nombres cherchés
qui seront relatifs à ces nombres pris
à volonté, suivant les conditions exi-
-gées et proposées.

Je ne sais s'il est possible de
donner une notion plus nette de
l'algebre à ceux qui n'en ont aucune;
peut être ce qu'on vient de dire ne sera

til pas encore assez developpé pour eux; mais peut etre est-il necessaire d'etre aumoins initié dans cette science pour pouvoir s'en former une idée precise; je ne doute point que ceux qui seront dans ce dernier cas ne trouvent juste et exacte celle que nous venons d'exposer. C'est sans doute d'apres une notion semblable que newton a donné a l'algebre le nom d'arithmetique universelle; denomination qui en effet exprime et renferme ce que nous venons de dire sur la veritable

objet et la nature de cette science.

Après avoir fait sentir l'utilité des caracteres algebriques pour exprimer les nombres proprement dits, il sera plus facile encore d'en faire sentir l'utilité pour exprimer les rapports incommensurables. En premier lieu ces rapports ont, pour ainsi dire, un droit de plus que les nombres, à pouvoir être representés par des caracteres algebriques; puisque ces caracteres n'ayant point, comme les nombres, de valeur fixe et determinée, n'en sont que plus propres à designer des rapports qui ne peuvent être exprimés exactement

par des nombres; En second lieu, les principes generaux enoncés ou indiqués ci dessus, sur les proprietés generales des nombres et sur les resultats du calcul qu'on en peut faire, principes qui servent de base, comme nous l'avons dit, au calcul algebrique, ont éga-lement lieu pour les rapports incommensurables. De même par exemple, qu'on double, qu'on triple, qu'on quadruple &c. un nombre en le multipliant par 2, par 3, par 4 &c, on double ou triple, ou quadruple &c un rapport

incommensurable en le multipliant
par 2, par 3, par 4 &c; on le reduit
pareillement ainsi que tout nombre, à
la moitié, au tiers, au quart, en le
divisant par 2, par 3, par 4 &c; il
en est de même d'une infinité d'autres
verités semblables, également communes
à toutes sortes de rapports, soit ex-
primables par des nombres, soit incom-
-mensurables; En un mot toutes les
verités sur les nombres, lesquelles ne
supposeront pas ou l'idée de nombres
entiers en general, ou celle de tel nombre
en particulier, ou la maniere d'ecrire et
de designer les nombres par nôtre

calcul arithmétique et decimal, toutes ces verités auront égalemt. lieu pour les rapports incom-mensurables. Le calcul algebri-que, qui ne considere les rapports et les nombres que de la maniere la plus generale et la plus abstraite, s'etend donc et s'applique aux rapports incommensurables, et même encore plus parfaitement à ces rapports qu'aux nombres propre-ment dits; et sous ce nouveau point de vue, il merite encore a plus juste titre le nom d'arithméti-que universelle.

Nous verrons dans le §. suivant, d'après les notions que nous venons de donner de l'algebre, comment elle s'applique à la geometrie; mais avant de finir, exposons encore quelques-unes des fausses idées qu'on peut reprocher au commun des algebristes. Elles serviront, pour ainsi dire, de preuves justificatives apportées d'avance de ce que nous dirons dans le dernier des §. suivans, sur l'abus de la metaphysique en geometrie, et surtout en algebre; et les idées nettes et precises que nous tacherons ici de substituer à ces idées fausses, pourront montrer en

même temps un essai de la vraie metaphysique dont ces sciences sont susceptibles.

Les auteurs ordinaires d'ele-mens ne pechent pas seulement par le peu de soin qu'ils ont de donner une idée nette de l'al-gebre et de son but; mais encore par le peu d'exactitude des notions qu'ils attachent à certaines expressions. Pour abreger je me bornerai à la notion des quantités negatives. Les uns regardent ces quantités comme au dessous de rien, notion absurde en elle même; les autres comme exprimant

des dettes, notion trop bornée et par cela seul peu exacte; les autres comme des quantités qui doivent être prises dans un sens contraire aux quantités qu'on a supposées positives; notion dont la geometrie fournit aisement des exemples, mais qui est sujette à de frequentes exceptions; puisqu'il est aisé de faire voir par des exemples tirées aussi de la geometrie, que des quantités representées par le calcul avec le signe negatif, doivent quelquefois être prises du même sens que les quantités caracterisées par le signe positif. Qu'est ce donc que les quantités negatives? Il

en faut distinguer de deux especes.

Les premieres par leur signe negatif indiquent une fausse supposition qui a été faite dans l'enoncé du problême, supposition redressée par la solution. Si on demande un nombre qui ajouté à 20 fasse 15, on trouvera 5 avec le signe negatif; ce qui marque qu'il auroit fallut énoncer le problême en cette sorte; trouver un nombre tel qu'étant <u>retranché</u> de 20, et non <u>ajouté</u>, le resultat de l'operation soit 15. En voila autant

qu'il est necessaire pour donner ici la vraie notion de cette premiere espece de quantités negatives, qui se rencontrent à touts momens dans les solutions de problêmes.

La seconde espece de quantités negatives, se rencontre principalemt. dans les problêmes où le resultat du calcul paroit presenter plusieurs solutions; elles indiquent alors des solutions du même problême, envisagé sous un point de vue un peu different de celui que l'enoncé suppose, mais toujours analogue à ce premier sens.

Les quantités negatives de la premiere espece montrent la generalité et

l'avantage du calcul algebrique, qui redresse, pour ainsi dire, le calculateur en partant de la supposition même qui auroit du l'égarer. Les quantités negatives de la seconde espece montrent tout à la fois et la richesse de cette science qui fait trouver dans la solution du problême, jusqu'aux choses qu'on ne demandoit pas, et en même temps, si on ose le dire, l'imperfec-tion du calcul, qui, en donnant sans qu'on le cherche ce qu'on ne lui demande point, ne donne pas toujours ce qu'on lui demande

avec toute la perfection qu'on pourroit exiger. C'est ce qui n'arrive que trop dans les questions algebriques; la solution d'un probleme qui n'en a quelque fois réellement qu'une seule possible, dans le sens où il a été proposé, est souvent incorporée et comme amalgamée avec plusieurs autres solutions de problemes ana-logues, mais differens; solutions qui enveloppant et masquant, pour ainsi dire, la premiere, la rendent plus difficile à découvrir. Ceux qui ont quelque connoissance de ce qu'on appelle en algebre la theorie des équations, savent par experience la verité de ce

que nous venons de dire; mais en voila assez sur ce sujet, pour ne pas rebuter ceux de nos lecteurs à qui les élemens de cette science sont absolument inconnus.

§. XVIII. De l'application de l'algebre à la géometrie.

Pour se faire une idée de cette application et en comprendre les avantages, il faut se rappeller les principes suivans.

La Geometrie est, comme nous l'avons dit ailleurs,* la science des proprietes de l'étendue, considerée simplement entant qu'etendue et figurée.

Ces proprietes consistent en grande partie dans le rapport qu'ont entr'elles les differentes parties de l'étendue figurée.

* Elemens de Philosophie To. IV. p. 158.

Par consequent un des grands objets de la geometrie est de connoître et de calculer le rapport des lignes les unes avec les autres, celui des surfaces entr'elles, et celui des solides entr'eux.

Ces rapports peuvent être, ou exprimés par des nombres, ou incommensurables.

Le rapport des surfaces, ou pour abreger les surfaces mêmes, peuvent être representées comme nous l'avons expliqué plus haut, par le produit de deux lignes, en regardant ces lignes comme ex-primées par des nombres qui en

indiquent le rapport.

Il n'est par même necessaire que le rapport de ces lignes soit commensurable; et quelqu'il soit, le produit des quantités qui expriment ce rapport representera la surface.

De même et par la même raison un solide ou corps geometrique, ayant les trois dimensions, c'est à dire de 3 quantités dont le rapport soit le même que celui de ces lignes.

Or les caracteres algebriques designant également bien, soit les nombres, soit les rapports incommensurables, comme on la vu cy dessus; ces

caracteres peuvent servir parfai-
-tement à representer les lignes,
en sorte que le produit de deux
caracteres algebriques peut
exprimer une surface, celui de
3 un solide &c.

Par consequent les operations
qu'on pourra faire sur ces carac-
-teres, les rapports qu'on y de-
-couvrira, en un mot les verités
qu'on pourra tirer de leur com-
-binaison par des operations
algebriques, exprimeront, étant
traduites du langage algebrique
en langage geometrique, des
verités qui seront relatives au

rapport des lignes, des surfaces et des solides.

Par la même raison les operations algebriques qui servent à resoudre les questions qu'on peut proposer sur les nombres, serviront de même a resoudre les questions geometriques, qu'on peut proposer sur le rapport des lignes, des surfaces et des solides; et par consequent en general à resoudre la plus part des questions qui ont rapport à cette science. En effet ces questions analysées se reduisent pour l'ordinaire à trouver certains rapports entre certaines lignes, certaines surfaces, certains solides; puisque

la plus part des proprietés des figures consistent ou dans le rapport qu'il y a entre quelques unes de leurs parties, determinées d'une certaine maniere, ou dans le rapport de certaines lignes tirées dans ces figures, ou dans le rapport de ces figures, prises dans leur entier ou par parties, avec d'autres figures aussi prises dans leur entier ou par parties; et ainsi du reste.

Toutes ces considerations suffiroient pour faire sentir l'usage et l'utilité de l'application de

l'algebre à la geometrie; mais il est surtout une branche de cette science, où l'analyse algebrique est extremem.t utile, c'est la théorie des courbes.

Pour s'en convaincre il faut con-siderer d'abord la maniere dont on determine la nature d'une courbe; on rapporte les points de cette courbe CABQ par des perpen-diculaires AD, BE, QO, qu'on appelle <u>ordonnées</u>, à une ligne droite fixe et indefinie CR tirée dans le plan de cette courbe, et sur laquelle les lignes AD, BE, QO, sont perpendiculaires; les

parties CD, CE, CO, de la ligne CR s'appellent les abscisses.

C D A E B O Q

On sent bien que puisque la nature de la courbe CABQ est déterminée, la longueur de chaque ordonnée DA doit être déterminée par rapport à l'abscisse correspondante CD, puisque c'est la longueur plus ou moins grande DA de cette ordonnée qui donne par son extrémité le point cor-respondant A de la courbe. La nature de la courbe consiste donc dans un certain rapport, une certaine loi qui s'observe entre

chaque ordonnée comme DA,
et l'abscisse CD correspondante.
Par exemple dans la courbe
appellée <u>parabole</u> le quarré de chaque
ordonnée est égal au parallelogramme
rectangle qui auroit pour hauteur
l'abscisse correspondante et pour
base une ligne toujours la même
appellée <u>parametre</u>; si donc on suppose
que cette ligne toujours la même soit
appellée <u>a</u>, que chaque abscisse soit
appellée <u>x</u>, et l'ordonnée correspon-
-dante y, le quarré de y sera egale
au produit de <u>a</u> par <u>x</u>, ce qui s'exprime
algebriquement en cette sorte $yy = ax$.* C'est

* Cette marque = est le signe de l'égalité, et signifie <u>égale</u>.

la ce qu'on appelle l'équation de la courbe, dont tous les points, comme l'on voit, sont determinés par cette équation. Il en est de même de toutes les autres courbes; elles ont chacune leur équation particuliere qui sert à determiner leurs points; et ces équations, dont l'invention est due à Descartes, sont une des branches les plus belles et les plus fecondes de l'applica-tion de l'algebre à la geometrie.

Ayant l'equation entre les y et les x, c'est à dire entre

les ordonnées et les abscisses, l'al-
-gebre enseigne a en deduire l'équa-
-tion entre les differences des
abscisses et celles des ordonnées;
or nous avons montré dans la section
sur les principes metaphysiques
du calcul infinitesimal, comment
la connoissance du rapport entre
ces differences donne la limite de
ce rapport, comment cette limite
donne les tangentes de la courbe,
et en general comment ce calcul
des limites des rapports est la
clef du calcul differentiel et integral.
Nous n'en pourrions dire davantage,

ni nous faire entendre sur les détails où nous entrerions à ce sujet, sans donner un traité complet d'algebre, de Geometrie, et de calcul infinitesemal, ce qui n'est pas ici notre objet, et qui a d'ailleurs été executé dans un grand nombre d'ouvrages. Ce que nous nous sommes proposé ici, c'est seulement de presenter sur l'algebre et son application à la Geometrie des notions simples, nettes et precises, à des personnes aussi respectables qu'éclairées, à qui d'autres occupations ne permettent pas de s'appliquer à ces sciences et d'en

faire leur objet; nous croyons que le peu que nous avons dit suffira pour leur donner ces notions et pour leur faire sentir l'usage et l'utilité de l'analyse mathématique dans la science des propriétés de l'étendue.

§. XIX. Sur l'usage et sur l'abus de la metaphysique en geometrie et en general dans les sciences Mathématiques.

La metaphysique, selon le point de vue sous lequel on l'envisage, est la plus satisfaisante ou la plus futile des connoissances humaines; la plus satisfaisante quand elle ne considere que des objets qui sont à sa portée, qu'elle les analyse avec netteté et avec précision, et qu'elle ne s'éleve point dans cette analyse au dela de ce qu'elle connoit clairement de ces mêmes objets; la plus futile, lorsqu'orgueilleuse et tenebreuse tout àlafois, elle s'enfonce

dans une region refusée a ses regards, qu'elle disserte sur les attributs de Dieu, sur la nature de l'ame, sur la liberté, et sur d'autres sujets de cette espece, où toute l'antiquité philosophique s'est perdue, et où la philosophie moderne ne doit pas esperer d'être plus heureuse. C'est de cette science de tenebres qu'un grand Prince disoit il y a peu de temps, dans une lettre digne d'être lue par tous les philosophes et par tous les Rois; Il n'y a point assez de données en metaphysique; nous créons les principes que

nous appliquons à cette science, et
ils ne nous servent qu'à nous égarer
plus methodiquement ; ce qui me
persuade de plus en plus que la façon
dont existe l'être suprême, la creation
ou l'éternité de cet univers, la nature
de ce qui se passe en nous, sont des
choses qu'il ne nous importe pas
de connoitre, sans quoi nous les
connoitrions ; pourvu que l'homme
sache distinguer le bien et le mal, qu'il
ait un penchant déterminé pour l'un
et de l'aversion pour l'autre, pourvu
qu'il soit assez maitre de ses passions
pour qu'elles ne le tiranisent pas,
et ne le precipitent point dans l'infor-

-tune, c'est, je crois, assez pour le rendre heureux; le reste des connoissances metaphysiques, dont on s'efforce en vain d'arracher le secret à la nature, ne nous serviroient qu'à contenter nôtre curiosité insatiable, autant qu'elles seroient d'ailleurs inutiles a nôtre usage; l'homme jouit, il est fait pour cela; que lui faut il davantage?

Ce n'est donc pas de cette metaphysique couverte de nuages qu'il sera question ici, mais d'une metaphysique plus a

notre portée, plus terre à terre, de celle qu'on peut porter dans les sciences naturelles, et principalement dans la geometrie et les differentes parties des mathematiques.

A proprement parler, il n'y a point de science qui n'ait sa metaphysique, si on entend par ce mot les principes generaux sur lesquels cette science est appuyée, et qui sont comme le germe des verités de détail que renferme cette science; principes d'où il faut partir pour decouvrir de nouvelles verités, ou auxquels il est necessaire de remonter

pour mettre au creuset les verités qu'on croit découvrir.

Cependant comme le mot metaphysique, ne doit s'appliquer proprement et suivant son sens veritable, qu'aux objets immateriels, on ne donne point proprement de partie metaphysique aux sciences qui ont des objets palpables et sensibles; c'est par cette raison que la medecine, la pharmacie, la Botanique, la chimie n'ont point de métaphysique; par la meme raison la physique

particuliere qui entre dans le detail des proprietés des corps materiels, n'en a pas non plus; mais la physique generale en a une, par ce que cette physique a pour objet des choses abstraites, comme l'espace en general, le mouvement et le temps en general, les proprietés generales de la matiere; la Grammaire à de même sa metaphysique, entant qu'elle analyse les idées dont les mots ne sont que les expressions, la musique a la sienne, entant qu'elle remonte aux sources du plaisir que l'harmonie et la melodie nous causent. Enfin la geometrie qui s'occupe comme

la physique generale, des proprietés de l'etendue abstraite, mais de l'etendue entant que figurée (au lieu que la physique generale la considere entant que divisible, et mobile) la geometrie, dis-je, a aussi sa metaphysique comme la physique generale; c'est de cette derniere metaphysique qu'il est ici principalement question.

En toutes choses, dit la morale pratique, il faut considerer la fin; en toutes choses, dit la saine metaphysique speculative, il faut considerer le principe. Or quel

est le principe de la geometrie? la nature de l'étendue, non pas peut être telle quelle est, mais telle que nous la concevons, c'est à dire comme composée de parties semblables entr'elles, et comme étant susceptible de trois dimensions, que nous pouvons considerer, ou toutes ensemble, ou deux a deux, ou chacune separement.

Le premier usage de la meta-physique en geometrie, est de donner d'après cette notion des idées claires du solide, de la surface, de la ligne; l'abus seroit de disserter sur la nature de l'étendue, sur l'existence de point

mathématique, qui n'est qu'un abstraction de l'esprit, sur la nature de la ligne droite qu'il nous est si difficile de bien définir, quoique nous la connoissions assez par sa propriété principale pour en déduire évidemment toutes les autres. Voyez à ce sujet nos réflexions précédentes sur les élemens de Geometrie.

L'usage et l'abus de la metaphysique en geometrie peuvent aussi se faire sentir tout àlafois dans la maniere de traiter certaines questions qui ont partagé

les geometres, par exemple dans celle de l'angle de contingence dont nous avons parlé plus haut ; on verra l'abus de la metaphysique dans les difficultés dont on a embrouillé cette question, faute d'avoir fixé nettement l'idée qu'on devoit attacher au mot angle ; on appercevra l'usage de la metaphysique dans l'examen de la veritable idée qu'on doit attacher à ce mot, examen au moyen duquel toute cette controverse se reduit a une dispute de mots. Nous avons déja remarqué à l'occasion de cette controverse même, que ce n'est pas le seul exemple de pareilles disputes élevées dans le sein des

mathématiques, et qui au grand scandale de l'évidence dont cette science se glorifie, ont partagé quelquefois les sçavans les plus éclairés et les plus celebres.

L'usage et l'abus de la metaphysique, peuvent encore avoir lieu dans la solution de certains problemes; on en decouvre l'abus en voulant employer les raisonnemens metaphysiques à resoudre des questions pour lesquelles nous avons un guide plus sur, le calcul et l'analyse qui ne peuvent nous égarer,

au lieu qu'une metaphysique vague et hazardée, quelquefois même une metaphysique claire et simple en apparence, peut nous égarer souvent. Si on demandoit, par exemple, quelle est la ligne qu'un corps pesant doit décrire pour aller d'un point donné à un autre point donné dans le temps le plus court qu'il est possible, un metaphysicien, surtout s'il avoit le malheur d'être un peu geometre, repondroit tout d'un coup et sans hesiter, que la ligne qu'on cherche est une ligne droite; parce que cette ligne étant la plus courte de toutes,

doit par consequent être parcourue en moins de temps qu'aucune autre. Le metaphysicien se tromperoit; une analyse exacte fait voir que la ligne cherchée est une courbe. Mais que peut faire la metaphysique et en quoi consiste ici son veritable usage! Elle peut, quand le probleme est resolu, éclairer l'esprit jusqu'à un certain point sur le resultat de la solution, dissiper le paradoxe auquel cette solution semble conduire, faire connoître comment il est possible qu'une certaine ligne courbe, quoique plus longue que la ligne droite, soit neanmoins parcourue en moins de temps.

La metaphysique peut faire encore plus, elle peut même, non pas faire trouver la solution des problemes mais faire entrevoir en plusieurs cas, la route qu'on doit suivre pour arriver à cette solution; elle y parvient par un examen attentif des circonstances de la question proposée. Par exemple dans celle dont il s'agit, elle nous fait connoître que la proprieté de la courbe de la plus vite descente doit avoir lieu non seulement dans la courbe prise en total, mais dans chacune de ses parties infiniment petites, d'ou l'on voit que la question se reduit a trouver une courbe dont chaque partie infiniment

petite soit parcourue dans un temps plus court que toute autre petite partie de courbe passant par les mêmes extrémités; dès lors la voye est, pour ainsi dire, ouverte au calcul, et le probleme est réduit à une pure question d'analyse. On peut voir ce que nous avons dit sur cela dans l'Eloge de Bernoulli, à l'occasion de cette question même, Tome II de nos Mélanges, depuis la page 17 jusqu'à la page 25; nous avons taché d'y exposer tout à la fois l'usage et l'abus qu'on peut faire de la metaphysique dans

cette question, envisagée même sous differens points de vue; un tel exemple sera plus utile pour faire sentir ces abus et ces usages, que des preceptes generaux sans application.

Enfin l'usage et l'abus de la metaphysique en geometrie peuvent surtout avoir lieu dans deux parties considerables de cette derniere science, dans l'application de l'analyse a la geometrie, et dans le calcul infinitesimal.

Nous l'avons déja dit ailleurs; une metaphysique aussi fine que vraie a présidé à l'invention du calcul alge-brique, de l'application de ce calcul a la geometrie, et surtout du calcul

infinitesimal. Cette metaphysi-
-que lumineuse et simple, qui
a guidé les inventeurs, leur
a fait imaginer des signes ou
façons abregées de s'exprimer,
dans lesquelles toute cette meta-
-physique est pour ainsi dire
enveloppée; mais ces signes abregés
ont cela de commode, qu'ils redui-
-sent presque toute la science à
des operations purement mecha-
-niques. Ces operations sont a la
metaphysique qui a guidé les
inventeurs, ce que les regles
usuelles de la grammaire sont
a la metaphysique des idées d'après

lesquelles ces regles ont été établies ;
metaphysique qui ne peut être connue
et sentie que par les philosophes, au lieu
que les regles qui en sont le resultat
sont a la portée de la multitude et destinées
a son usage. De même dans les arts
mechaniques l'esprit, et le genie des
inventeurs se trouve, si on peut parler
de la sorte, reduit et concentré dans
un petit nombre d'operations manuelles,
d'autant plus admirables, que leur
simplicité les met à portée d'être execu-
-tées par les mains les plus grossieres,
par des hommes bien éloignés de se
douter de l'esprit qui met leurs doigts
en mouvement ; a peu près comme le

corps est guidé par une ame
qu'il ne connoit point.

C'est donc cette metaphysique
primitive que le philosophe doit
chercher dans les operations alge-
-briques, dans l'application de
ces operations a la geometrie, et
dans le calcul infinitesimal.

Pour y parvenir et ne s'égarer
jamais, il doit toujours avoir devant
les yeux cette grande verité, que
la metaphysique qu'il cherche doit
être aussi simple et aussi lumineuse
que les operations qui en sont le
resultat sont sures et faciles; par
ce qu'il eut été impossible que des
principes obscurs et alambiqués

eussent conduit à des consequences qui ne le fussent pas.

On trouvera, je pense, ce caractere de lumiere et de simplicité dans les notions metaphysiques que nous avons donnée ci dessus de la nature des operations algebriques, de celle des rapports incommensurables, et surtout de celle des quantités negatives sur laquelle tant de geometres et de philosophes se sont formé des idées si fausses.

Mais c'est principalement dans le calcul infinitesimal que l'usage et l'abus de la metaphysique peuvent

se faire également sentir. Nous le disons avec peine, et sans vouloir outrager les manes d'un homme celebre qui n'est plus, il n'y a peut être point d'ouvrage où l'on trouve des preuves plus fre-quentes de l'abus dont nous parlons, que dans l'ouvrage très connu de M. de fontenelle qui a pour titre, éléments de la geometrie de l'infini; ouvrage dont la lecture est d'autant plus dangereuse aux jeunes geo-metres, que l'auteur y présente ses sophismes avec une sorte d'élegance, et pour ainsi dire de grace dont le sujet ne paroissoit pas susceptible.

Il semble que les ouvrages geometriques
de ce philosophe soient destinés a produire,
sur les jeunes gens qui entrent dans
la carriere des sciences, le meme effet
que ses ouvrages de belles lettres sur
les jeunes litterateurs, celui d'égarer
les uns et les autres par des défauts
d'autant plus propres à seduire, qu'ils
se trouvent et agréables par eux mêmes
et joints d'ailleurs a des beautés
réelles. La grande source des erreurs
de M. de fontenelle est d'avoir voulu
réaliser l'infini, et conséquemment
en faire la base réelle de ses calculs;
au lieu de le regarder ainsi que

nous l'avons fait * comme la limite a laquelle le fini ne peut jamais ateindre, et de chercher dans cette notion si simple et si vraie l'explication des paradoxes que les resultats de ce calcul semblent presenter. Voici le raisonnement de l'illustre secretaire de l'academie des sciences pour établir l'existence réelle de la grandeur infinie; la grandeur, dit-il, est susceptible d'augmentation sans fin. Elle n'est donc pas

* Voyez l'eclaircissement sur les principes metaphysiques du calcul infinitesimal.

et ne peut être supposée dans le même
cas, que si elle n'étoit pas susceptible
d'augmentation sans fin; or si elle n'étoit
pas susceptible d'augmentation sans
fin, elle resteroit toujours finie; donc
étant susceptible d'augmentation
sans fin, elle peut être supposée infinie.
Il est aisé de repondre que la difference
entre la grandeur susceptible d'augmenta-
tion sans fin, et la grandeur qui ne le
seroit pas, ne consiste point en ce que
la seconde resteroit toujours finie, au lieu
que la premiere peut être supposée infinie;
mais en ce que la seconde reste finie
sans pouvoir passer certaines limites,
au lieu que la 1.ere peut être supposée aussi
grande qu'on voudra, en demeurant

neanmoins toujours finie.

Aussi qu'elle a été le puis du principe Hazardé d'ou nôtre illustre philosophe est parti? De le mener a des conséquences dont l'absurdité auroit du lui ouvrir les yeux sur ce principe même; il donne par exemple, pour reellement existantes des quantités qu'il appelle finies indeterminables, et qui ne sont selon lui, ni finies, ni infinies; comme si de pareilles quantités n'etoient pas un veritable être de raison dont il est impossible de se former même l'idée; il est vrai que cette conclusion absurde est la suite necessaire du principe,

que la grandeur peut être supposée infinie; car il est clair que dans son passage du fini à l'infini, qui ne sauroit être un passage brusque, elle ne peut être ni finie ni infinie; c'est encore en vertu du même principe, que M. de fontenelle a distingué differens ordres d'infinis et d'infiniment petits, qui n'existent pas plus les uns que les autres; qu'il a distingué de même deux especes d'infinis, l'in-fini metaphysique et l'infini geome-trique, aussi chimeriques l'un que l'autre, quand on voudra leur attribuer une existence réelle.

Nous avons taché dans l'éclair-
-cissement particulier sur les prin-
-cipes du calcul infinitesimal,
d'exposer la vraie metaphysique
qui sert de base a ces principes,
et alaquelle nous n'avons rien a
ajouter ici; cette metaphysique, et
celle que nous avons taché de repan-
-dre dans tout ce que nous avons
dit ci dessus, peuvent donner une
idée suffisante de celle qui doit être
employée en geometrie, et de celle qui
doit y être proscritte. Heureux si par
ces differentes réflexions nous
avons rempli notre objet, et repondu
aux desirs du grand Prince qui
nous a proposé ces questions.

V

